¿Son únicas las soluciones de la ecuación estacionaria de Navier-Stokes?

En esta charla abordamos una pregunta fundamental en la teoría de las ecuaciones de Navier–Stokes estacionarias en $\mathbb{R}^3$:

¿Bajo qué condiciones de integrabilidad global la única solución es la trivial?

La condición clásica $u \in L^{9/2}(\mathbb{R}^3)$, debida a G. Galdi, garantiza dicha unicidad. Sin embargo, un problema abierto importante es si este exponente puede relajarse.

Presentamos un resultado positivo al respecto: demostramos que la trivialidad se sigue ya bajo la condición

$$u \in L^{9/2+\varepsilon(\cdot)}(\mathbb{R}^3),$$

donde $\varepsilon(\cdot) > 0$ puede variar con el punto. Esto permite que el exponente de integrabilidad sea localmente mayor que $9/2$, pero sin una cota inferior global uniforme.

Como consecuencia, obtenemos un **teorema de Liouville localizado**: basta imponer la condición de integrabilidad **en el infinito** (fuera de un conjunto compacto), sin hipótesis adicionales sobre el comportamiento interior de u. Esto muestra que el fenómeno de unicidad es de naturaleza puramente asintótica.

La demostración se apoya en un resultado general de unicidad en espacios de exponente variable, los cuales permiten capturar de manera natural diferentes regímenes de integrabilidad coexistiendo en distintas regiones del espacio.

Finalmente, discutiremos las implicaciones de estos resultados y posibles extensiones.

Palabras clave: Navier–Stokes, teoremas de Liouville, unicidad.