

Title of the project: Dynamical aspects of piecewise continuous maps.

Estamos interesados en estudiar algunas propiedades generales asociadas con la dinámica de mapas continuos a trozos (PC-mapas) definidos sobre el intervalo y sobre *dominios compactos del plano complejo* (cdpc). Específicamente, queremos describir el comportamiento de la entropía topológica como una función definida sobre el espacio de pc-mapas, así como también nos interesa describir la dinámica “típica” exhibida por sistemas contractivos a trozos en un sentido topológico. Recientemente, una noción de perturbación fue introducida [12], la cual permite describir fenómenos dinámicos de pc-mapas tales como la robustez de puntos críticos no degenerados y tales como la genericidad de sistemas que admiten medidas de probabilidad Borelianas invariantes. Esta es la primera noción de perturbación inducida por una topología metrizable sobre el espacio de pc-mapas del intervalo (la cual llamaremos *pc-topología*). Además, estamos interesados en definir una pc-topología análoga sobre el espacio de pc-mapas definidos sobre dcpc. Pensamos que la estructura rígida de las deformaciones cuasi-conformes nos permitirá construir una métrica similar –aunque más sofisticada– a la definida en [12]. Así, proponemos estudiar los siguiente 3 temas:

- **Establecer una versión del $\mathcal{C}^1$ closing lemma de Pugh para pc-mapas.** Básicamente, el closing lemma afirma que arbitrariamente cerca de mapas que admiten un punto recurrente x , existe otro mapa para el cual x es un punto periódico. Queremos implementar la misma idea que es usada para probar el closing lemma en el contexto continuo, pero esta vez sobre el espacio de pc-mapas. Sea f un pc-mapa y x un punto recurrente de f (es decir, $x \in \omega_f(x)$). Si x y $f^n(x)$ son cercanos, entonces podemos empujar $f^n(x)$ a x (es decir, definir un pc-mapa g tal que $g(f^{n-1}(x)) = x$) y así construir una órbita periódica para un pc-mapa cercano. Para hacer esto, debemos cuidar que $f = g$ sobre los puntos intermedios; esto es, $g^i(x) = f^i(x)$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Probablemente, no será difícil probar este resultado para la $\mathcal{C}^0$ pc-topología; sin embargo, en la $\mathcal{C}^1$ pc-topología necesitaremos ser más cuidadosos para así no empujar dichos puntos intermedios. La principal utilidad que queremos dar a este resultado está relacionada con la genericidad de mapas contractivos a trozos cuya dinámica asintótica es periódica.
- **Encontrar la dinámica asintótica genérica de los sistemas contractivos a trozos.** El closing lemma y el *teorema de descomposición espectral* probado en [14] permiten mostrar que los mapas contractivos a trozos del intervalo que son asintóticamente periódicos son genéricos sobre el subespacio métrico inducido por la pc-topología. Sin embargo, para mapas contractivos a trozos definidos sobre dcpc no tenemos un teorema de descomposición espectral que nos entregue información acerca de los posibles atractores que dichos sistemas pueden soportar. Lo que podemos hacer en este caso es mostrar que, genéricamente, el atractor no intersecta discontinuidades. Así, vía el Teorema 3.1 en [20] podemos concluir que la dinámica asintótica periódica es genérica en este caso también.
- **Establecer la regularidad de la entropía topológica definida sobre el espacio de pc-mapas y algunas de sus buenas propiedades.** M. Misiurewicz y K. Ziemian mostraron en [29] que es posible calcular la entropía topológica conociendo el número minimal de intervalos de monotonía del mapa f^n para cada $n \geq 1$. Esta fórmula resuelve el problema de definir una fórmula de entropía topológica para pc-mapas. Una estrategia para establecer buenas propiedades de dicha entropía sobre el espacio de pc-mapas sería probar que esta coincide con una noción topológica pura de entropía (es decir, que no necesita una métrica para ser definida). Las buenas propiedades son necesarias si queremos extender la teoría y buscar utilidades en dinámica (por ejemplo, la preservación por conjugaciones topológica es importante si queremos definir un concepto de *estabilidad estructural*). Para estudiar la regularidad de la pc-entropía planeamos adaptar las demostraciones de M. Misiurewicz y W. Szlenk en [28] y así mostrar que el mapa $f \mapsto h_{top}(f)$ (definido sobre la colección de pc-mapas) es semi-continuo inferiormente.

Referencias

- [1] Adler, R.L., Konheim, A.G. and McAndrew, M.H. Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, **114(2)** (1965) 309-319.
- [2] Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A.R. and Kowalczyk, P. Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications. *Springer Science & Business Media*, **Vol.163** (2008).
- [3] Boshernitzan, M. A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic. *Duke Mathematical Journal*, **52(3)** (1985) 723-752.
- [4] Bowen, R. Topological entropy and Axiom A, Global Analysis. *Proc. Sympos. Pure Math., American Mathematical Society*, **14** (1970) 23-42.
- [5] Bowen, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **153** (1971) 401-414.
- [6] Bronzi, M.A. and Oler, J.G. Equilibrium State for One-Dimensional Lorenz-Like Expanding Maps. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **49(4)** (2018) 873-892.
- [7] Bruin, H. and Deane, J. Piecewise contractions are asymptotically periodic. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137(4)** (2009) 1389-1395.
- [8] Bullett, S. Invariant circles for the piecewise linear standard map. *Communications in mathematical physics*, **107(2)** (1986) 241-262.
- [9] Buzzzi, J. and Hubert, P. Piecewise monotone maps without periodic points: Rigidity, measures and complexity. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24** (2004) 383-405.
- [10] Cánovas, J.S. and Rodríguez, J.M. Topological entropy of maps on the real line. *Topology and its Applications*, **153(5-6)** (2005) 735-746.
- [11] Castro, A. The ergodic closing lemma for nonsingular endomorphisms (2009): *arXiv preprint arXiv:0906.2031*.
- [12] Calderón, A. Robust and generic properties for piecewise continuous maps on the interval (2022): *ArXiv preprint arxiv:2203.11066*.
- [13] Calderón, A. Dynamics of piecewise contracting interval maps. *Doctoral thesis PUV-UV, Valparaíso, Chile* (2021).
- [14] Calderón, A., Catsigeras, E. and Guiraud, P. A spectral decomposition of the attractor of piecewise-contracting maps of the interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **41(7)** (2021) 1940-1960.
- [15] Casey, R., De Jong, H. and Gouzé, J.L. Piecewise-linear models of genetic regulatory networks: equilibria and their stability. *Journal of mathematical biology*, **52** (2006) 27-56.
- [16] Catsigeras, E. Chaos and stability in a model of inhibitory neuronal network. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **20** (2010) 349-360.
- [17] Catsigeras, E. and Budelli, R. Topological dynamics of generic piecewise continuous contractive maps in n dimensions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **68** (2011) 61-83.
- [18] Catsigeras, E., Guiraud, P. and Meyroneinc, A. Complexity of injective piecewise contracting interval maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **40(1)** (2020) 64-88.
- [19] Catsigeras, E. and Guiraud, P. Integrate and fire neural networks, piecewise contractive maps and limit cycles. *Journal of mathematical biology* (2013) 1-47.

- [20] Catsigeras, E., Guiraud, P., Meyroneinc, A. and Ugalde, E. On the asymptotic properties of piecewise contracting maps. *Dynamical Systems*, **31** (2016) 107-135.
- [21] Cessac, B. A discrete time neural network model with spiking neurons. *Journal of Mathematical Biology*, **56** (2008) 311-345.
- [22] Coutinho, R. Dinâmica simbólica linear, Ph.D. Thesis. *Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa* (1999).
- [23] Coutinho, R., Fernandez, B., Lima, R. and Meyroneinc, A. Discrete time piecewise affine models of genetic regulatory networks. *Journal of mathematical biology*, **52** (2006) 524-570.
- [24] Dinaburg, E.I. A correlation between topological entropy and metric entropy. In *Doklady Akademii Nauk, Russian Academy of Sciences*, **190(1)** (1970) 19-22.
- [25] Edwards, R., van den Driessche, P. and Wang, L. Periodicity in piecewise-linear switching networks with delay. *Journal of mathematical biology*, **55** (2007) 271-298.
- [26] Iwai, K. Continuity of topological entropy of one dimensional maps with degenerate critical points. *Journal of Mathematical Sciences-University of Tokyo*, **5(1)** (1998) 19-40.
- [27] G. Keller, Equilibrium states in ergodic theory, *Cambridge University Press*, **42** (1998).
- [28] Misiurewicz, M. and Szlenk, W. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math* **67** (1980) 45-63.
- [29] Misiurewicz, M. and Ziemian, K. Horseshoes and entropy for piecewise continuous piecewise monotone maps. In *From Phase Transitions To Chaos: Topics in Modern Statistical Physics* (1992) 489-500.
- [30] Newhouse, S.E. Continuity properties of entropy. *Annals of Mathematics*, **129(1)** (1989) 215-235.
- [31] Nogueira, A. and Pires, B. Dynamics of piecewise contractions of the interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **35** (2015) 2198-2215.
- [32] Nogueira, A., Pires, B. and Rosales, R.A. Asymptotically periodic piecewise contractions of the interval. *Nonlinearity*, **27** (2014) 1603-1610.
- [33] Nogueira, A., Pires, B. and Rosales, R.A. Topological dynamics of piecewise λ -affine maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **38(5)** (2018) 1876-1893.
- [34] Laurent, M. and Nogueira, A. Rotation number of contracted rotations. *Journal of Modern Dynamics*, **12** (2018) 175-191.
- [35] Pedreira, F. On the behaviour of the singular values of expanding Lorenz maps. *Doctoral thesis, Universidade Federal da Bahia* (2020).
- [36] Pires, B. Invariant measures for piecewise continuous maps. *Comptes Rendus Mathematique*, **354(7)** (2016) 717-722.
- [37] Pugh, C.C. The closing lemma. *American Journal of Mathematics*, **89(4)** (1967) 956-1009.
- [38] Ruette, S. Chaos on the Interval. *American Mathematical Soc.*, **Vol.67** (2017) .
- [39] Tramontana, F. and Westerhoff, F. Piecewise-linear maps and their application to financial markets. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, **2** (2016) 10.
- [40] Walters, P. An introduction to ergodic theory. *Springer Science & Business Media*, **79** (2000).

- [41] Wen, L. The $\mathcal{C}^1$ closing lemma for non-singular endomorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **11(2)** (1991) 393-412.
- [42] Wen, L. The $\mathcal{C}^1$ closing lemma for endomorphisms with finitely many singularities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **114(1)** (1992) 217-223.
- [43] Zhusubaliyev, Z.T. and Mosekilde, E. Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems: applications to power converters, relay and pulse-width modulated control systems, and human decision-making behavior. *World Scientific*, **Vol.44** (2003).